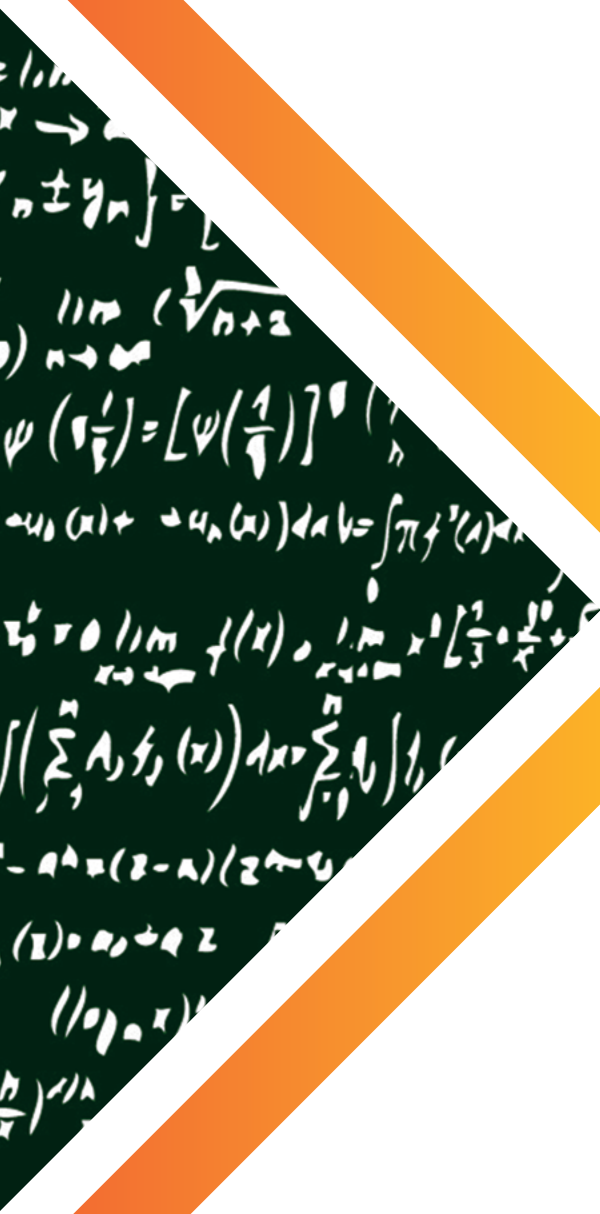
PUISSANCE ALPHA

Le grand concours Ingénieur



EXERCICES ÉPREUVE MATHS

INSTRUCTIONS AUX CANDIDATS

Durée de l'épreuve : 2 h

Chaque épreuve contient 16 exercices indépendants. Le candidat doit répondre à 12 exercices sur les 16 qui lui sont présentés, ce qui lui permet d'éliminer les exercices qui porteraient sur une partie du programme non traitée à la date des épreuves écrites. S'il répond à plus de 12 exercices, seuls les 12 premiers seront corrigés.

Chaque exercice comporte 4 affirmations signalées par les lettres a, b, c, d. Pour chacune des affirmations.

le candidat indique si l'affirmation est vraie (V) ou fausse (F), ou il s'abstient ;

Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse V ou F à l'une des 4 affirmations est donnée ;

Toute bonne réponse rapporte un point, toute réponse inexacte entraîne le retrait d'un point ;

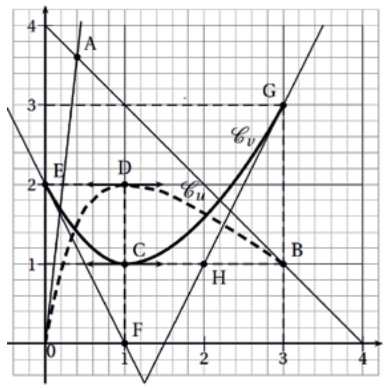
L'abstention et l'annulation ne sont pas considérées comme des réponses, elles ne rapportent ni ne retirent aucun point ;

Une bonification d'un point est ajoutée chaque fois qu'un exercice est traité correctement (c'est à dire si le candidat a fourni 4 réponses exactes à l'exercice).

Exercice n°1

Lecture graphique.

Dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne les points A(0,4;3,6), B(3;1), C(1;1), D(1;2), E(0;2), F(1;0), G(3;3) et H(2;1).



Soit u et v deux fonctions définies sur l'intervalle [0;3] de courbes représentatives respectives $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ tracées ci-contre.

On donne les informations suivantes :

- Les droites (OA) et (AB) sont tangentes à $\mathscr{C}_u$ respectivement à l'origine du repère et au point B.
- Les droites (EF) et (GH) sont tangentes à $\mathscr{C}_v$ respectivement aux points E et G.
- $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ admettent respectivement aux points D et C une tangente horizontale.

a) $v'(3) = 3$.

b) $u'(0) = 9$.

c) $\left(\frac{1}{v}\right)'(1) = -v'(1)$.

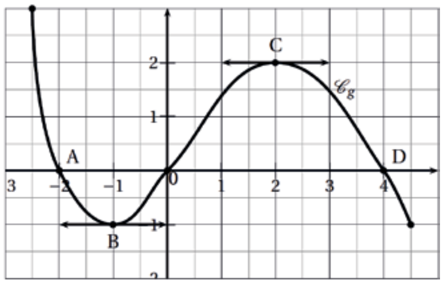
d) $(u \times v)'(3) = 1$.

Exercice n°2

Petites questions de logique sur les fonctions.

Soit f est une fonction définie et dérivable sur [0;1].

a) $f(0,5)$ est compris entre $f(0)$ et $f(1)$.
b) Si $f(0) > 1$ et $f(1) < 0$ alors l'équation $f(x) = \frac{1}{v}$ admet une unique solution dans l'intervalle [0;1].



Soit g une fonction définie sur l'intervalle [-2,5;4,5] de courbe représentative $\mathscr{C}_g$ ci-contre.

c) Si $g(x) = 0$ alors $x = 4$.
d) Si $x \in \{-1;0;2;4\}$ alors $f'(x) \times f(x) = 0$.

Exercice n°3

Suites et algorithmes.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$.

Pour tout entier naturel n on pose (v_n) la suite définie par $v_n = u_n^2 - 4$.

On donne les valeurs arrondies à 10^{-2} suivantes :

$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{14}$	$\sqrt{15}$
1,41	1,73	2,24	2,45	2,65	2,83	3,16	3,32	3,46	3,61	3,74	3,87

a) $u1 = \sqrt{3}$, $u_2 = \frac{\sqrt{15}}{2}$ et $u_3 = \frac{3\sqrt{7}}{4}$

b) La suite (v_n) est géométrique.

c) On démontre que, pour tout entier naturel n, $u_n = \sqrt{\frac{4^n - 1}{4^{n-1}}}$

On considère l'algorithme suivant :

Variables	N est un nombre entier naturel U est un nombre réel E est un nombre réel
Traitement	Lire E Affecter à N la valeur 0 Affecter à U la valeur 0 Tant que 2-U > E faire début tant que U prend la valeur $\frac{\sqrt{U^2 + 12}}{2}$ N prend la valeur N+1 Fin Tant que
Sortie	Afficher N

d) Si E = 0,1 alors N = 2.

Exercice n°4

Limites et asymptotes.

a) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+1}{x^2 - 3} = -\infty$.

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{3} xe^x = -\infty$.

Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}+1}{x+2}$ de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans le repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

c) $\mathscr{C}_f$ admet admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.
d) $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $x = -1$ comme asymptote verticale.

Exercice n°5

Calculs d'intégrales.

a) $\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx = \frac{e^2}{2}$.

b) $\int_1^2 \left(2 - \frac{3}{x^2}\right) dx = \frac{1}{2}$.

c) $\int_e^{e^2} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dx = 2\left(e - e^{\frac{1}{2}}\right)$.

d) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\ln x dx = \frac{3}{e}$.

Exercice n°6

Etude de deux fonctions *ln*.

Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = ln(2x)$ et $g(x) = ln(x^2 - 1)$ de courbes représentatives respectives $\mathscr{C}_g$.

a) $g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

b) $g'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

c) La tangente à $\mathscr{C}_g$ en $x = \sqrt{2}$ a pour équation $y = 2\sqrt{2}x - 4$.

d) Si $x \in]1;1 + \sqrt{2}]$, la courbe $\mathscr{C}_g$ est située au dessus de $\mathscr{C}_f$.

Exercice n°7

Etude d'une fonction exponentielle.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2-2x}$.

a) $f(1) = -\frac{1}{e}$.

b) $\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto +\infty} f(x)$.

c) $f'(x) = f(x)$.

d) L'équation $f(x) = \frac{1}{3}$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

Exercice n°8

Notions de base sur les complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Le point A a pour affixe $z_A = 1 + i$.
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O passant par le point A et B un point de $\mathscr{C}$ d'affixe réelle z_B positive.
On définit le point E tel que le quadrilatère $OBEA$ soit un losange.

a) $z_A = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b) L'affixe du point B est $z_B = \dfrac{3}{2}$.

c) L'affixe du point E est $z_E = (1 + \sqrt{2}) + i$.

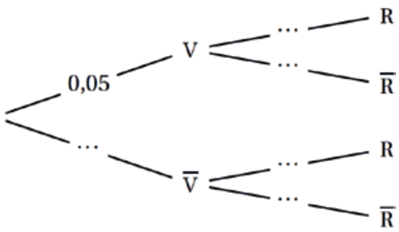
d) $OE = 2\sqrt{2}$.

Exercice n°9

Petit exercice de probabilité.

Mon vélo est sujet à de trop fréquentes crevaisons.
Une fois sur dix, quand je prends mon vélo au moins l'une des deux roues est crevée ; la probabilité que la roue avant soit crevée vaut 0,05 et les crevaisons à la roue avant et à la roue arrière sont indépendantes.

Je vais chercher mon vélo un jour quelconque, on note :
V l'événement « la roue avant est crevée ».
R l'événement « la roue arrière est crevée ».



a) $P(V \cup R) = 0{,}1$ et $P(V \cap R) = 0{,}05 \times P(V)$.

b) J'ai constaté que la roue arrière était crevée ; la probabilité que la roue avant le soit également vaut 0,05.

c) La roue avant et la roue arrière ont lamême probabilité d'être crevée.

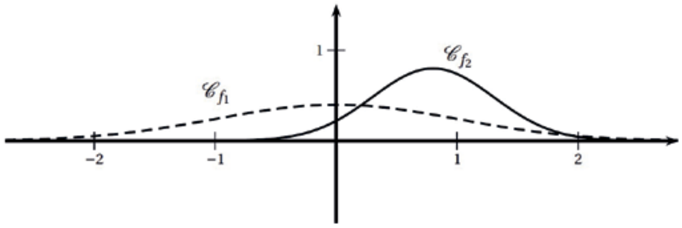
d) Il y a une chance sur 380 pour que les deux roues soient crevées.

Exercice n°10

Probabilités continues.

Soit μ_1 et μ_1 deux nombres réels, σ_1 et σ_1 deux nombres réels positifs.

Sur le graphique ci-dessous ont été représentées $\mathscr{C}_{f1}$ et $\mathscr{C}_{f2}$ respectivement les courbes représentatives des fonctions densité f_1 et f_2 de deux lois normales $\mathscr{N}_1(\mu_1 ; \sigma_1^2)$ et $\mathscr{N}_2(\mu_2 ; \sigma_2^2)$.

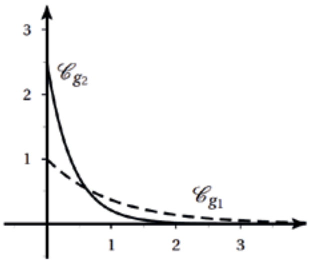


($\mathscr{C}_{f1}$ en pointillés et $\mathscr{C}_{f2}$ en trait plein).

a) $\mu_1 < \mu_2$ et $\sigma_1 < \sigma_2$.

Soit λ_1 et λ_2 deux nombres réels strictement positifs.

Sur le graphique ci-dessous ont été représentées $\mathscr{C}_{g1}$ et $\mathscr{C}_{g2}$ respectivement les courbes représentatives des fonctions densité g_1 et g_2 de deux lois exponentielles de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.



($\mathscr{C}_{g1}$ en pointillés et $\mathscr{C}_{g2}$ en trait plein)

b) $\lambda_1 < \lambda_2$.

Dans une région agricole, le rendement des parcelles de blé peut être assimilé à une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 100 et d'écart-type 8 (en quintaux par hectare.)

On choisit une parcelle au hasard et on note R son rendement.

c) La variable aléatoire $Z = \frac{R - 100}{8^2}$ suit la loi normale centrée réduite.

d) La probabilité que la parcelle ait un rendement inférieur à 116 quintaux par hectare est égale à 0,9.

Exercice n°11

Notions de base dans l'espace.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère des deux plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives $(P) : x - y = 0$ et $(Q) : y + 2z - 3 = 0$.
Ces plans se coupent selon une droite Δ et on pose K le point de coordonnées $K(1;0;2)$.

a) (P) et (Q) sont deux plans orthogonaux.

b) Le vecteur $\vec{u}$ (2;2;-1) est un vecteur directeur de la droite Δ.

c) $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = \dfrac{3 - t}{2} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite Δ.

d) Le plan (R) d'équation cartésienne $2x + 2y - z = 0$ est parallèle à Δ et contient la droite (OK).

Exercice n°12

Utilisation des complexes en géométrie.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit (E) l'équation $z^2 - 6z + 12 = 0$.

a) (E) admet deux solutions complexes z_1 et z_2.

On pose z_1 la solution ayant une partie imaginaire positive.

b) $4 - z_1 = 2e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

Soit A le point d'affixe $z_A = 4$ et M_1, M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2.

c) $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) = \dfrac{\pi}{6} (mod\ 2\pi)$.

d) Le point M_1 est situé sur le cercle de diamètre $[OA]$.

Exercice n°13

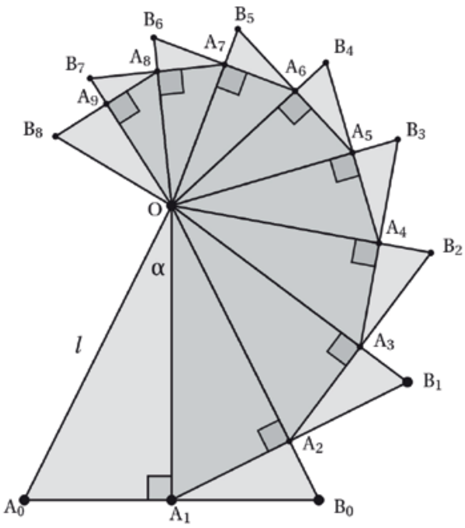
Un peu de trigonométrie dans escargot.

Dans le triangle OA_0B_0, isocèle en O, A_1 est le milieu du segment $[A_0;B_0]$.

On note B_1 le symétrique de A_1 par rapport à la droite (OB_0) et A_2 le milieu du segment $[A_1;B_1]$.

En réitérant le processus on obtient, pour tout entier naturel n, une suite de triangles isocèles OA_nB_n (cf figure ci-dessous).

On pose $\alpha = \widehat{A_0OA_1}$ et $l = OA_0$.



« Il y a loin de la route aux escargots »
Paul Eluard - Proverbes

a) Pour tout entier naturel n on a $OA_{n+1} = \sin\alpha \times OA_n$ et $A_nA_{n+1} = \cos\alpha \times OA_n$.
b) Pour tout entier naturel n on a $OA_n = l \times (\cos\alpha)^n$.

On pose, pour tout entier naturel n non nul, la suite (L_n) définie par $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$.

c) $L_n = l \times \sin\alpha \times \dfrac{1 - (\cos\alpha)^{n+1}}{1 - \cos\alpha}$.

On rappelle que, pour tout réel x, on a $\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ et $\sin(2x) = 2 \times \sin x \times \cos x$.

d) $L_n = l \times \dfrac{1 - (\cos\alpha)^n}{\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

PUISSANCE ALPHA
Le grand concours Ingénieur

Exercice n°14

Fonction dépendant d'un paramètre.

Pour tout nombre réel k strictement positif, on définit la fonction f_k par $f_k(x) = (x + k)e^{-x}$ de courbe représentative $\mathscr{C}_k$.

Par exemple si $k = 7$, la fonction f_7 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_7(x) = (x + 7)e^{-x}$.

a) $\mathscr{C}_k$ coupe les axes du repère aux points de coordonnées $(k;0)$ et $(0;k)$.

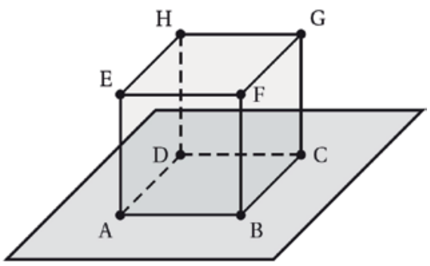
b) Si $k = 3$ alors la fonction f_3 admet e^2 commeminimum sur $\mathbb{R}$.

c) La fonction f_k définie par $f_k(x) = (-x - 1 - k)e^{-x}$ est une primitive de f_k.

d) L'aire de la portion de plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}_3$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $4 - 5e^{-1}$.

Exercice n°15

Notions d'espace dans un cube.

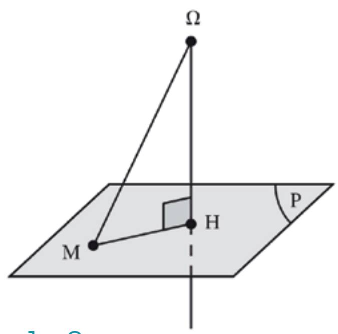


ABCDEFGH est un cube de côté 1 et $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace.

a) Le volume du tétraèdre BCDG est égal à $\frac{1}{6}$.

b) L'aire du triangle BDG est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Définition :



On appelle distance du point au plan (P) la plus petite distance ΩM avec M un point du plan (P), elle représente la distance ΩH avec H le projeté orthogonal du point Ω dans le plan (P).

c) La distance du point C au plan (BDG) est égale à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

d) Une équation cartésienne du plan (BDG) est $x + y - z - 1 = 0$.

Exercice n°16

Etude d'une spirale.

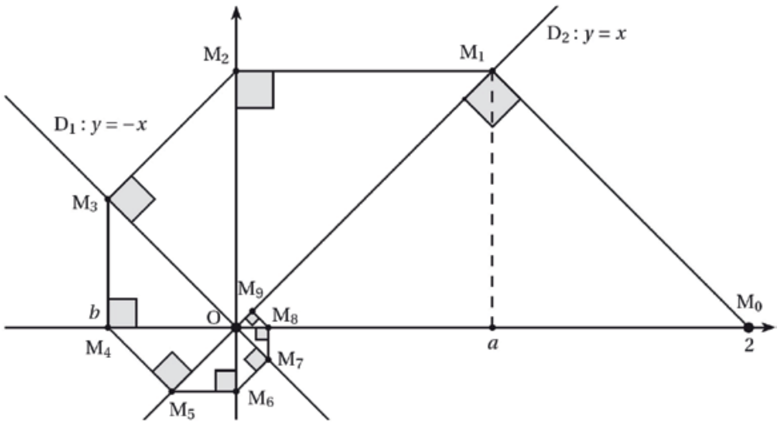
Soit $(0; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

D_1 et D_2 sont les droites d'équations $D_1 : y = -x$, $D_2 : y = x$ et M_0 représente le point de coordonnées (2;0).

On construit M_1 le projeté orthogonal de M_0 sur la droite D_2,M_2 le projeté orthogonal de M_1 sur l'axe des ordonnées, M_3 le projeté orthogonal de M_2 sur la droite D_1 et M_4 le projeté orthogonal de M_3 sur l'axe des abscisses.

On réitère le même procédé afin de définir, pour tout entier naturel n, la suite de points (M_n) représentée cidessous.

On note a l'abscisse du point M_1 et b l'abscisse du point M_4 avec a et b deux nombres réels.



a) $a = 1$ et $M_1M_2 = 1$.

b) $M_2M_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On définit les suites (l_n) et (S_n) à l'aide des relations $l_n = M_nM_{n+1}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} l_k$.

c) $l_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times l_n$.

d) $\lim_{x \mapsto -\infty} S_n = 2\sqrt{2}+1$.

Correction QCM

Exercice n°1

a) ☒ b) ☑ c) ☑ d) ☒

Exercice n°2

a) ☒ b) ☒ c) ☒ d) ☒

Exercice n°3

a) ☑ b) ☑ c) ☑ d) ☑

Exercice n°4

a) ☒ b) ☒ c) ☒ d) ☑

Exercice n°5

a) ☒ b) ☑ c) ☑ d) ☒

Exercice n°6

a) ☒ b) ☒ c) ☑ d) ☒

Exercice n°7

a) ☒ b) ☑ c) ☒ d) ☒

Exercice n°8

a) ☒ b) ☒ c) ☑ d) ☒

Exercice n°9

a) ☑ b) ☑ c) ☒ d) ☑

Exercice n°10

a) ☒ b) ☑ c) ☒ d) ☒

Exercice n°11

a) ☒ b) ☑ c) ☑ d) ☒

Exercice n°12

a) ☑ b) ☒ c) ☑ d) ☑

Exercice n°13

a) ☒ b) ☑ c) ☒ d) ☑

Exercice n°14

a) ☒ b) ☒ c) ☑ d) ☑

Exercice n°15

a) ☑ b) ☒ c) ☒ d) ☑

Exercice n°16

a) ☑ b) ☒ c) ☑ d) ☒